

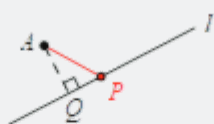
## 第2讲二次函数与线段和差最值

### 一、单线段的最值

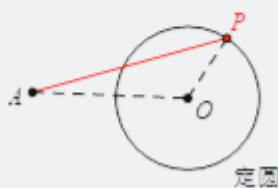
#### 1. 一定一动

##### 🔗 教法备注

1. 一定点，一动点在直线上求最小值

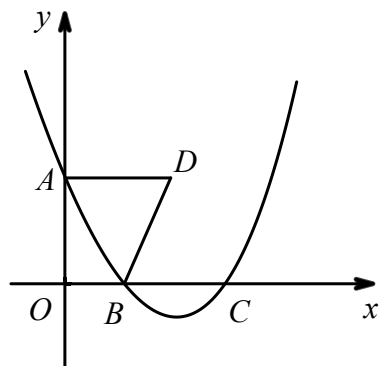


2. 一定点，一动点在圆上求最值



##### 🔗 典题精炼

1. 如图，在平面直角坐标系中，点A是y轴正半轴上的一动点，抛物线 $y = mx^2 - 5mx + 4m$  ( $m$ 是常数，且 $m > 0$ )过点A，与x轴交于B，C两点，点B在点C左侧．连接AB，以AB为边做等边三角形ABD，点D与点O在直线AB两侧．



- (1) 求B，C的坐标．

(2) 完成下列各题.

① 求动点 $D$ 所成的图象的函数表达式.

② 连接 $CD$ , 求 $CD$ 的最小值.

【答案】(1)  $(1, 0)$ ,  $(4, 0)$ .

$$(2) \textcircled{1} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\textcircled{2} \frac{5}{2}.$$

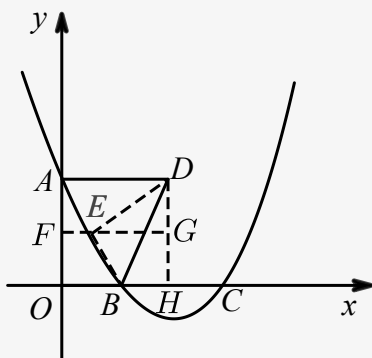
【解析】(1)  $y = mx^2 - 5mx + 4m$ ,

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则有 } mx^2 - 5mx + 4m = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 1, x_2 = 4,$$

$$\therefore B(1, 0), C(4, 0).$$

(2) ① 如图, 过点 $D$ 作 $DE \perp AB$ 于点 $E$ , 过点 $D$ 作 $x$ 轴的垂线于点 $H$ , 过点 $E$ 作 $EF \parallel x$ 轴交 $y$ 轴于点 $F$ 交 $DH$ 于点 $G$ ,



$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形,

$$\therefore \text{点 } E \text{ 为 } AB \text{ 的中点, } AE = BE = \frac{1}{\sqrt{3}}ED,$$

$$\therefore \text{点 } E\left(\frac{1}{2}, 2m\right),$$

$$\therefore \angle AEF + \angle FAE = 90^\circ, \angle AEF + \angle DEG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEG = \angle EAF,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle EDG,$$

$$\therefore \frac{AF}{EG} = \frac{AE}{ED} = \frac{EF}{DG} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ 其中 } EF = \frac{1}{2}, AF = 2m,$$

$$\text{解得: } GE = 2\sqrt{3}m, DG = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故点 } D\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}m, 2m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{即动点 } D \text{ 所成的图象的函数满足 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}m \\ y = 2m + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\therefore \text{动点 } D \text{ 所成的图象的函数表达式为: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

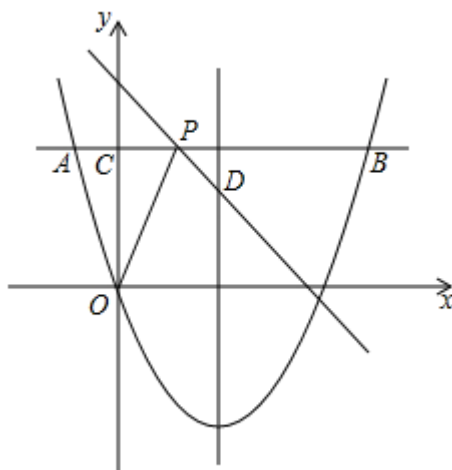
$$\textcircled{2} \text{ 由①得点 } D\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}m, 2m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore CD^2 = \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}m - 4\right)^2 + \left(2m + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16\left(m - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

故当  $m = \frac{3\sqrt{3}}{8}$  时,  $CD^2$  的最小值为  $\frac{25}{4}$ , 即  $CD$  的最小值为  $\frac{5}{2}$ .

**【标注】**【知识点】二次函数与动点问题

2. 如图, 过抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x$  上一点  $A$  作  $x$  轴的平行线, 交抛物线于另一点  $B$ , 交  $y$  轴于点  $C$ , 已知点  $A$  的横坐标为  $-2$ .



- (1) 求抛物线的对称轴和点  $B$  的坐标.
- (2) 在  $AB$  上任取一点  $P$ , 连结  $OP$ , 作点  $C$  关于直线  $OP$  的对称点  $D$ .
- ① 连结  $BD$ , 求  $BD$  的最小值.
- ② 当点  $D$  落在抛物线的对称轴上, 且在  $x$  轴上方时, 求直线  $PD$  的函数表达式.

**【答案】** (1) 对称轴  $x = 4$ ,  $B(10, 5)$ .

(2) ①  $BD$  的最小值  $= 5\sqrt{5} - 5$ .

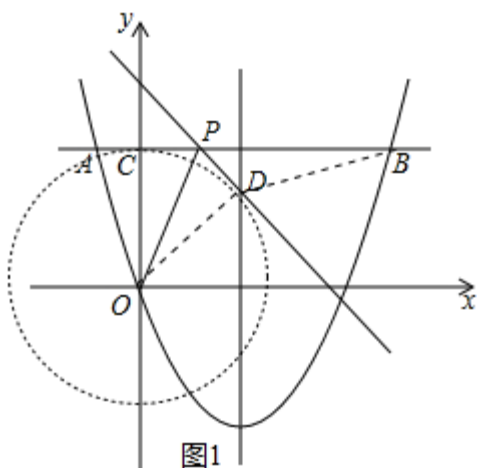
② 直线  $PD$  的解析式为  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ .

**【解析】** (1) 由题意  $A(-2, 5)$ , 对称轴  $x = -\frac{-2}{2 \times \frac{1}{4}} = 4$ ,

$\therefore A, B$  关于对称轴对称,

$\therefore B(10, 5)$ .

(2) ① 如图1中,



由题意点 $D$ 在以 $O$ 为圆心 $OC$ 为半径的圆上，

$\therefore$ 当 $O$ 、 $D$ 、 $B$ 共线时，

$$BD \text{ 的最小值} = OB - OD = \sqrt{5^2 + 10^2} - 5 = 5\sqrt{5} - 5.$$

② 如图2中，

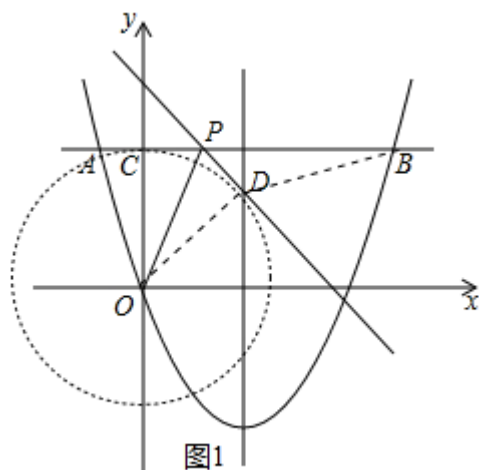
当点 $D$ 在对称轴上  
时，

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中，

$$OD = OC = 5,$$

$$OE = 4,$$

$\therefore$



$$DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$\therefore$ 点 $D$ 的坐标为 $(4, 3)$  .

设 $PC = PD = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle PDK$ 中，

$$x^2 = (4 - x)^2 + 2^2,$$

$$\therefore x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, 5\right),$$

$$\therefore \text{直线} PD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}.$$

**【标注】**【知识点】二次函数与动点问题

 经典再现

3.

已知点 $A(1, 0)$ 是抛物线 $y = ax^2 + bx + m$  ( $a, b, m$ 为常数,  $a \neq 0, m < 0$ )与 $x$ 轴的一个交点.

(1) 当 $a = 1, m = -3$ 时, 求该抛物线的顶点坐标.

(2) 若抛物线与 $x$ 轴的另一个交点为 $M(m, 0)$ , 与 $y$ 轴的交点为 $C$ , 过点 $C$ 作直线 $l$ 平行于 $x$ 轴,  $E$ 是直线 $l$ 上的动点,  $F$ 是 $y$ 轴上的动点,  $EF = 2\sqrt{2}$ .

① 当点 $E$ 落在抛物线上 (不与点 $C$ 重合), 且 $AE = EF$ 时, 求点 $F$ 的坐标.

② 取 $EF$ 的中点 $N$ , 当 $m$ 为何值时,  $MN$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ?

**【答案】** (1)  $(-1, -4)$ .

(2) ①  $(0, -2 - \sqrt{7})$ 或 $(0, -2 + \sqrt{7})$ .

②  $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ .

**【解析】** (1) 当 $a = 1, m = -3$ 时, 抛物线的解析式为 $y = x^2 + bx - 3$ .

$\because$  抛物线经过点 $A(1, 0)$ ,

$\therefore 0 = 1 + b - 3$ ,

解得 $b = 2$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ .

$\therefore y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ,

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为 $(-1, -4)$ .

(2) ①  $\because$  抛物线 $y = ax^2 + bx + m$ 经过点 $A(1, 0)$ 和 $M(m, 0)$ ,  $m < 0$ ,

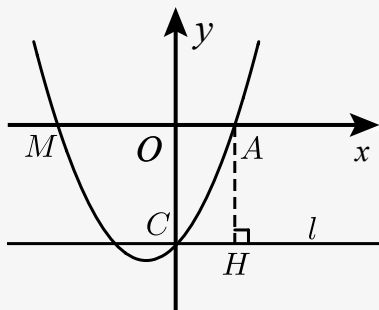
$\therefore 0 = a + b + m, 0 = am^2 + bm + m$ , 即 $am + b + 1 = 0$ ,

$\therefore a = 1, b = -m - 1$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为 $y = x^2 - (m + 1)x + m$ .

根据题意, 得点 $C(0, m)$ , 点 $E(m + 1, m)$ .

过点 $A$ 作 $AH \perp l$ 于点 $H$ ,



由点 $A(1, 0)$ , 得点 $H(1, m)$ .

在 $Rt\triangle EAH$ 中,  $EH = 1 - (m + 1) = -m$ ,

$HA = 0 - m = -m$ ,

$$\therefore AE = \sqrt{EH^2 + HA^2} = -\sqrt{2}m.$$

$$\therefore AE = EF = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore -\sqrt{2}m = 2\sqrt{2},$$

$$\text{解得 } m = -2.$$

$$\text{此时, 点 } E(-1, -2), \text{ 点 } C(0, -2), \therefore EC = 1.$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 在 } y \text{ 轴上},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle EFC \text{ 中}, CF = \sqrt{EF^2 - EC^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 的坐标为 } (0, -2 - \sqrt{7}) \text{ 或 } (0, -2 + \sqrt{7}).$$

$$\textcircled{2} \text{ 由 } N \text{ 是 } EF \text{ 的中点, 得 } CN = \frac{1}{2}EF = \sqrt{2},$$

根据题意, 点  $N$  在以点  $C$  为圆心、 $\sqrt{2}$  为半径的圆上.

$$\text{由点 } M(m, 0), \text{ 点 } C(0, m), \text{ 得 } MO = -m, CO = -m,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle MCO \text{ 中}, MC = \sqrt{MO^2 + CO^2} = -\sqrt{2}m.$$

当  $MC \geq \sqrt{2}$ , 即  $m \leq -1$  时, 满足条件的点  $N$  落在线段  $MC$  上,

$$MN \text{ 的最小值为 } MC - NC = -\sqrt{2}m - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{3}{2},$$

当  $MC < \sqrt{2}$ , 即  $-1 < m < 0$  时, 满足条件的点  $N$  落在线段  $CM$  的延长线上,

$$MN \text{ 的最小值为 } NC - MC = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}m) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{1}{2},$$

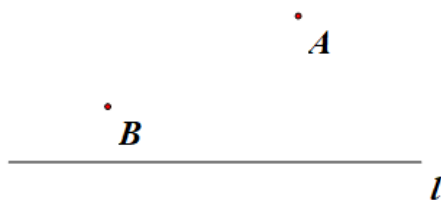
$$\therefore \text{当 } m \text{ 的值为 } -\frac{3}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \text{ 时, } MN \text{ 的最小值是 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

## 二、将军饮马

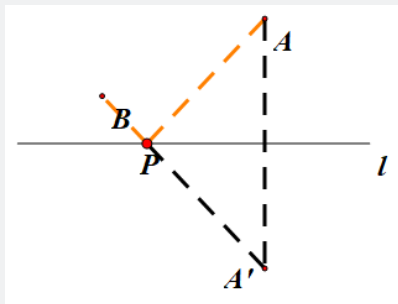
### 1. 两定一动类

如图, 在  $l$  上找一点  $P$ , 使  $PA + PB$  最小.



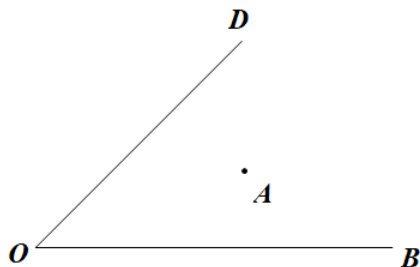
## 🧠 教法备注

作法：作点 $A$ 关于 $l$ 对称的点 $A'$ ，连接 $A'$ 、 $B$ ，与 $l$ 的交点即为点 $P$ 。



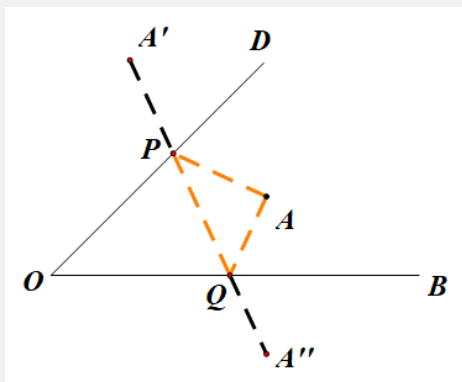
## 2. 一定两动类

1、如图，点 $A$ 在锐角 $\angle DOB$ 的内部，在 $OD$ 边上求作一点 $P$ ，在 $OB$ 边上求作一点 $Q$ ，使 $\triangle PAQ$ 的周长最小（或者使得 $PA + QA$ 最小）。



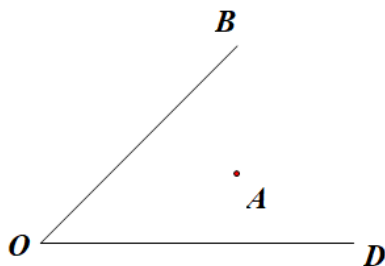
## 🧠 教法备注

作法：作点 $A$ 关于 $OD$ 对称的点 $A'$ ，作点 $A$ 关于 $OB$ 对称的点 $A''$ ，连接 $A'$ 、 $A''$ ，分别交 $OD$ 于点 $P$ ，交 $OB$ 于点 $Q$ 。



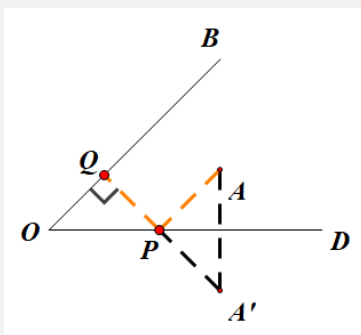
2、如图，点 $A$ 在锐角 $\angle DOB$ 的内部，在 $OD$ 边上求作一点 $P$ ，在 $OB$ 边上求作一点 $Q$ ，使得

$PQ + PA$ 最小.



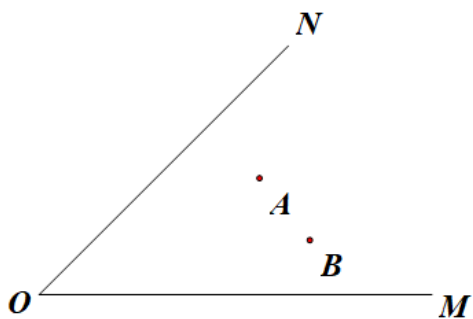
### 教法备注

作法：作点A关于OD对称的点A'，过点A'作OB的垂线段，交OB于点Q，交OD于点P.



## 3. 两定两动类

如图，点A、B在锐角 $\angle MON$ 的内部，在ON边上求作一点P，在OM边上求作一点Q，使四边形ABQP周长最小（或者使得 $PA + PQ + QB$ 最小）.



### 教法备注

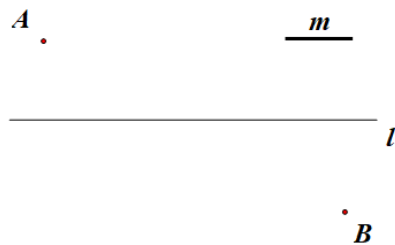
作法：作点A关于ON对称的点A'，作点B关于OM对称的点B'，连接A'、B'，分别交ON于点P，交OM与点Q.



**A**

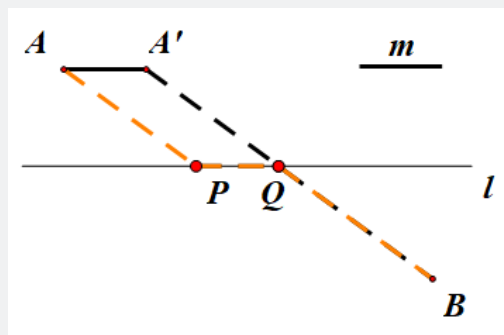


2、如图，直线 $l$ 外有两点 $A$ 、 $B$ ，有一定长线段 $m$ ，在直线上找到点 $P$ 、 $Q$ ，使得 $PQ$ 间的距离等于定长 $m$ ，且使得 $AP + PQ + QB$ 最小。

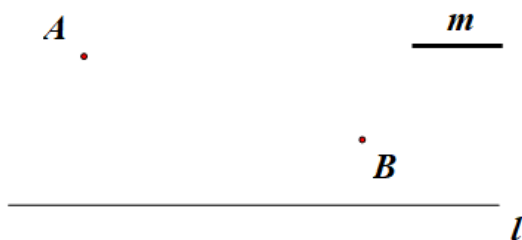


### 教法备注

作法：将点 $A$ 向右平移 $m$ 的长度得到点 $A'$ ；连接 $A'$ 、 $B$ ，交 $l$ 于点 $Q$ ，将点 $Q$ 向左平移 $m$ 的长度，得到点 $P$ 。

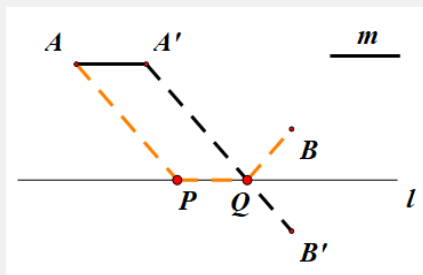


3、如图，直线 $l$ 外有两点 $A$ 、 $B$ ，有一定长线段 $m$ ，在直线上找到点 $P$ 、 $Q$ ，使得 $PQ$ 间的距离等于定长 $m$ ，且使得 $AP + PQ + QB$ 最小（或者使得四边形 $APQB$ 周长最小）。



### 教法备注

作法：将点 $A$ 向右平移 $m$ 的长度得到点 $A'$ ，作点 $B$ 关于 $l$ 的对称点 $B'$ ；连接 $A'$ 、 $B'$ ，交 $l$ 于点 $Q$ ，将点 $Q$ 向左平移 $m$ 的长度，得到点 $P$ 。



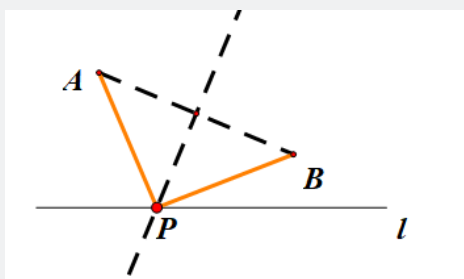
## 5. 差最小

1、如图，在 $l$ 上找一点 $P$ ，使 $|PA - PB|$  最小.

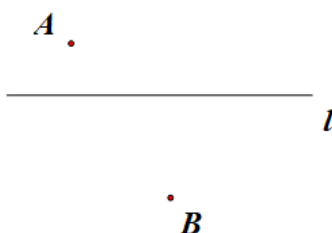


### 教法备注

作法：连接 $A$ 、 $B$ ，作线段 $AB$ 的垂直平分线，交 $l$ 于点 $P$ .

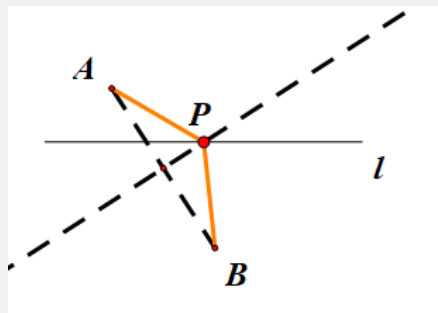


2、如图，在 $l$ 上找一点 $P$ ，使 $|PA - PB|$  最小.



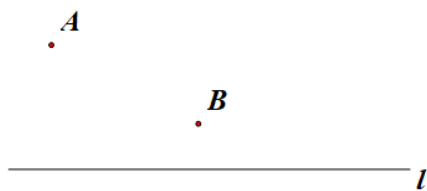
### 教法备注

作法：连接 $A$ 、 $B$ ，作线段 $AB$ 的垂直平分线，交 $l$ 于点 $P$ .



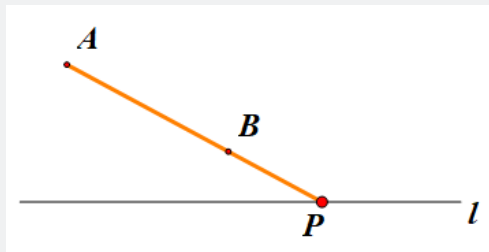
## 6. 差最大

1、如图，在 $l$ 上找一点 $P$ ，使 $|PA - PB|$  最大.

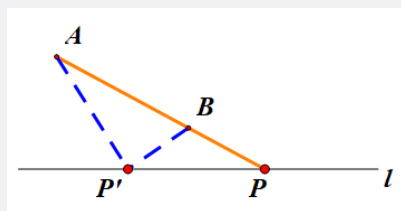


### 教法备注

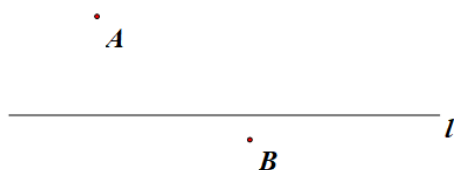
作法：过点A、B作直线AB，交l于点P.



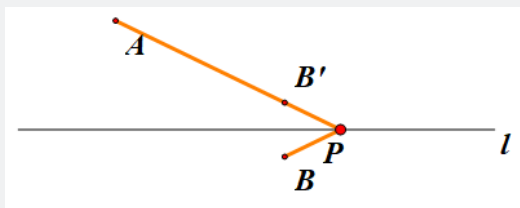
【备注】证明方法： $|PA - PB|_{\max} = AB$ ，其他位置点 $P'$ ， $|P'A - P'B| < AB$ .理由：三角形两边之差小于第三边.



2、如图，在l上找一点P，使 $|PA - PB|$ 最大.

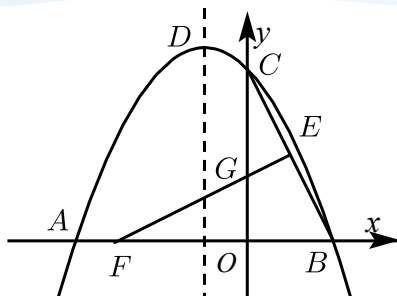


作法：作点B关于l对称的点 $B'$ ，过点A、 $B'$ 作直线 $AB'$ 交l于点P.



### 典题精炼

4. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 与x轴的两个交点分别为A(-4,0)、B(2,0)，与y轴交于点C，顶点为D；E(1,2)为线段BC的中点，BC的垂直平分线与x轴、y轴分别交于F、G.



(1) 求抛物线的函数解析式，并写出顶点 $D$ 的坐标。

(2) 在直线 $EF$ 上求一点 $H$ ，使 $\triangle CDH$ 的周长最小，并求出最小周长。

**【答案】** (1) 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ，顶点坐标是 $(-1, \frac{9}{2})$ 。

(2)  $H(\frac{3}{4}, \frac{15}{8})$ 。

**【解析】** (1) 根据题意得， $\begin{cases} 16a - 4b + 4 = 0 \\ 4a + 2b + 4 = 0 \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线} y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{顶点坐标是} (-1, \frac{9}{2}).$$

(2) 设抛物线的对称轴与 $x$ 轴交于点 $M$ ，

$\because EF$ 垂直平分 $BC$ ，

$\therefore C$ 与 $B$ 关于直线 $EF$ 对称，

连接 $BD$ 交 $EF$ 于 $H$ ，

此时 $DH + CH$ 最小，

$$DH + CH = DH + HB = BD,$$

$$= \sqrt{BM^2 - DM^2},$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{13},$$

$$\therefore CD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{9}{2} - 4\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$\therefore \triangle CDH$ 的周长最小为，

$$CD + DH + CH = \frac{\sqrt{5} - 3\sqrt{13}}{2},$$

设直线 $BD$ ， $y = kx + b$ ，

$$\text{代入} B, D \text{得}, y = \frac{3}{2}x + 3,$$

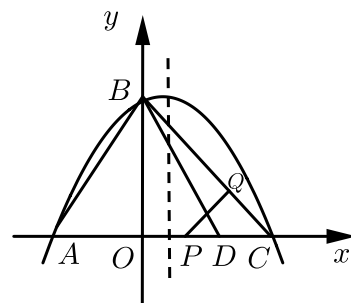
$$BC = 2\sqrt{5},$$

$$CE = \frac{1}{2}BC = \sqrt{5},$$

$$\begin{aligned}
&\because \text{Rt}\triangle CEG \sim \text{Rt}\triangle CDB, \\
&\therefore \frac{CE}{CO} = \frac{CG}{GB}, \\
&\therefore CG = 2.5, GO = 1.5, \\
&\therefore G(0, 1.5), y_{EF} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \\
&\begin{cases} y_{BD} = -\frac{3}{2}x + 3 \\ y_{EF} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}, \\
&\therefore H\left(\frac{3}{4}, \frac{15}{8}\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

5. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + 4 (a \neq 0)$  与  $x$  轴交于  $A(-3, 0)$ ， $C(4, 0)$  两点，与  $y$  轴交于点  $B$ 。



- (1) 求这条抛物线的顶点坐标。
- (2) 已知  $AD = AB$  (点  $D$  在线段  $AC$  上)，有一动点  $P$  从点  $A$  沿线段  $AC$  以每秒 1 个单位长度的速度移动；同时另一个点  $Q$  以某一速度从点  $B$  沿线段  $BC$  移动，经过  $t(s)$  的移动，线段  $PQ$  被  $BD$  垂直平分，求  $t$  的值。
- (3) 在 (2) 的情况下，抛物线的对称轴上是否存在一点  $M$ ，使  $MQ + MC$  的值最小？若存在，请求出点  $M$  的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) 顶点坐标为  $\left(\frac{1}{2}, \frac{49}{12}\right)$ 。

(2)  $\frac{25}{7}$ 。

(3) 存在，点  $M$  的坐标为  $\left(\frac{1}{2}, \frac{28}{41}\right)$ 。

【解析】(1)  $\because y = ax^2 + bx + 4 (a \neq 0)$  与  $x$  轴交于  $A(-3, 0)$ ， $C(4, 0)$  两点，

$$\therefore \begin{cases} 9a - 3b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases},$$

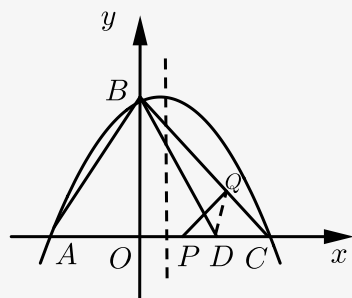
$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{12},$$

$$\therefore \text{顶点坐标为}\left(\frac{1}{2}, \frac{49}{12}\right).$$

(2) 连接  $DQ$ ,



$$\therefore A(-3, 0), C(4, 0),$$

$$\therefore OA = 3, OC = 4,$$

$$\therefore AC = OA + OC = 7,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 \text{ 与 } y\text{ 轴交于点 } B,$$

$$\therefore B(0, 4), \text{ 即 } OB = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 中, } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\text{又 } \because AD = AB,$$

$$\therefore AD = 5,$$

$$\therefore CD = AC - AD = 7 - 5 = 2,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore \text{线段 } PQ \text{ 被 } BD \text{ 垂直平分},$$

$$\therefore DP = DQ,$$

$$\therefore \angle DPQ = \angle DQP, \angle PDB = \angle QDB,$$

$$\text{又 } \because \angle PDB = \angle ABD, \angle ABD = \angle QDB,$$

$$\therefore AB \parallel DQ,$$

$$\therefore \triangle DQC \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DQ}{AB} = \frac{CD}{AC}, \frac{DQ}{5} = \frac{2}{7}, DQ = \frac{10}{7},$$

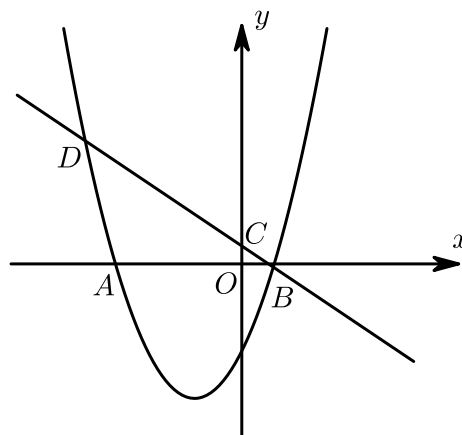
$$\therefore PD = DQ = \frac{10}{7},$$

$$\therefore AP = AD - DP = 5 - \frac{10}{7} = \frac{25}{7},$$

$$\therefore t = \frac{25}{7}.$$

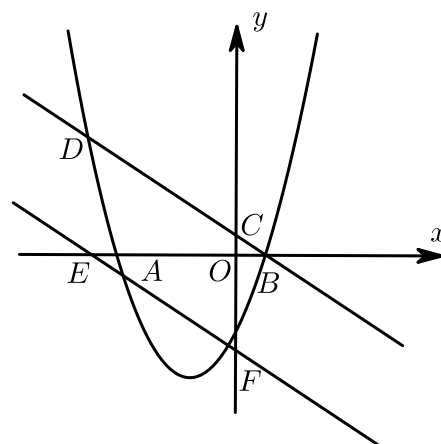
(3) 存在.





(1) 求直线和抛物线的表达式.

(2) 如图, 将直线  $BD$  沿  $y$  轴向下平移 4 个单位后, 与  $x$  轴,  $y$  轴分别交于  $E$ ,  $F$  两点, 在抛物线的对称轴上是否存在点  $M$ , 在直线  $EF$  上是否存在点  $N$ , 使  $DM + MN$  的值最小? 若存在, 求出其最小值及点  $M$ ,  $N$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



**【答案】** (1)  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}$ .

(2)  $N(-2, -2)$ ,  $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ .  $DM + MN$  最小为  $2\sqrt{13}$ .

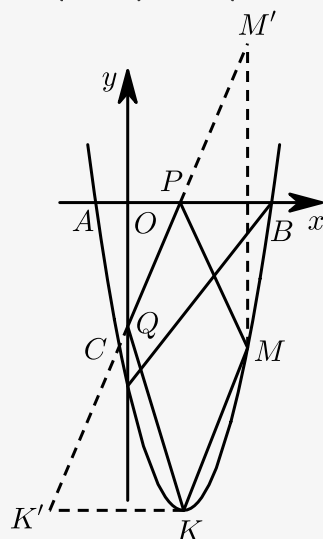
**【解析】** (1)  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}$ .

(2) 在抛物线上取点  $D$  的对称点  $D'$ , 过点  $D'$  作  $D'N \perp EF$  于点  $N$ , 交抛物线对称轴于点  $M$ , 过点  $N$  作  $NH \perp DD'$  于点  $H$ , 此时,  $DM + MN = D'N$  最小.

$N(-2, -2)$ ,  $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ ,  $DM + MN$  最小为  $2\sqrt{13}$ .

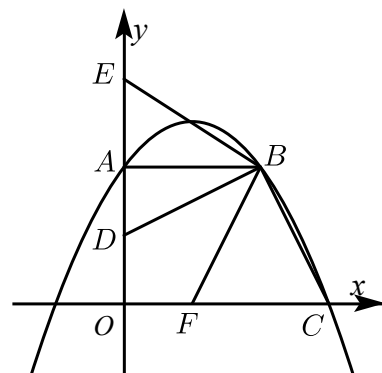


$\because M(4, m)$  在抛物线上 ,  
 $\therefore M(4, -5)$  ,  
 $\therefore$  点  $M$  关于  $x$  轴的对称点  $M'(4, 5)$  ,  
 $\therefore$  直线  $K'M'$  的解析式为  $y = \frac{7}{3}x - \frac{13}{3}$  ,  
 令  $x = 0$  , 则  $y = -\frac{13}{3}$  ,  
 令  $y = 0$  , 则  $x = \frac{13}{7}$  .  
 $\therefore P\left(\frac{13}{7}, 0\right)$  ,  $Q\left(0, -\frac{13}{3}\right)$  .



【标注】【知识点】二次函数与几何综合

8. 如图，已知在平面直角坐标系  $xOy$  中，直角梯形  $OABC$  的边  $OA$  在  $y$  轴的正半轴上， $OC$  在  $x$  轴的正半轴上， $OA = AB = 2$ ， $OC = 3$ ，过点  $B$  作  $BD \perp BC$ ，交  $OA$  于点  $D$ 。将  $\angle DBC$  绕点  $B$  按顺时针方向旋转，角的两边分别交  $y$  轴的正半轴、 $x$  轴的正半轴于点  $E$  和  $F$ 。



- (1) 求经过  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的抛物线的解析式。
- (2) 当  $BE$  经过 (1) 中抛物线的顶点时，求  $CF$  的长。
- (3) 在抛物线的对称轴上取两点  $P$ 、 $Q$  (点  $Q$  在点  $P$  的上方)，且  $PQ = 1$ ，要使四边形  $BCPQ$  的周长最小，求出  $P$ 、 $Q$  两点的坐标。

【答案】(1)  $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$ .

(2)  $CF = \frac{7}{3}$ .

(3) 点P的坐标为 $(1, \frac{2}{3})$ , 点Q的坐标为 $(1, \frac{5}{3})$ .

【解析】(1) 由题意得A(0, 2)、B(2, 2)、C(3, 0).

设经过A, B, C三点的抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + 2$ .

$$\text{则} \begin{cases} 4a + 2b + 2 = 2 \\ 9a + 3b + 2 = 0 \end{cases}$$

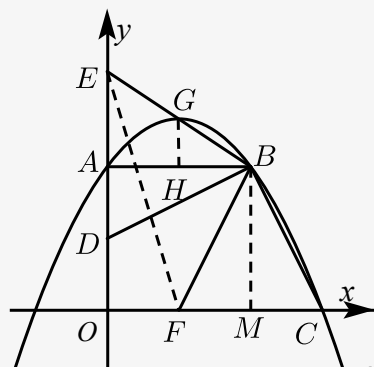
$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2.$$

(2) 由 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{8}{3}$ .

$$\therefore \text{顶点坐标为} G(1, \frac{8}{3}).$$

过G作 $GH \perp AB$ , 垂足为H.



$$\text{则} AH = BH = 1, GH = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore EA \perp AB, GH \perp AB,$$

$$\therefore EA \parallel GH.$$

$$\therefore GH \text{ 是 } \triangle BEA \text{ 的中位线.}$$

$$\therefore EA = 2GH = \frac{4}{3}.$$

过B作 $BM \perp OC$ , 垂足为M.

$$\text{则} MB = OA = AB.$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ABM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle FBM = 90^\circ - \angle ABF.$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle EBA \cong \text{Rt} \triangle FBM.$$

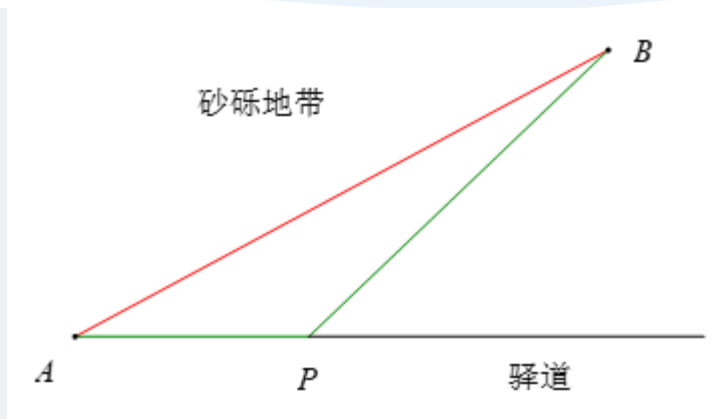
$$\therefore FM = EA = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore CM = OC - OM = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore CF = FM + CM = \frac{7}{3}.$$

可求出直线 $BC_1$ 的解析式为 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ .

点 $P$ 的坐标为 $(1, \frac{2}{3})$ .

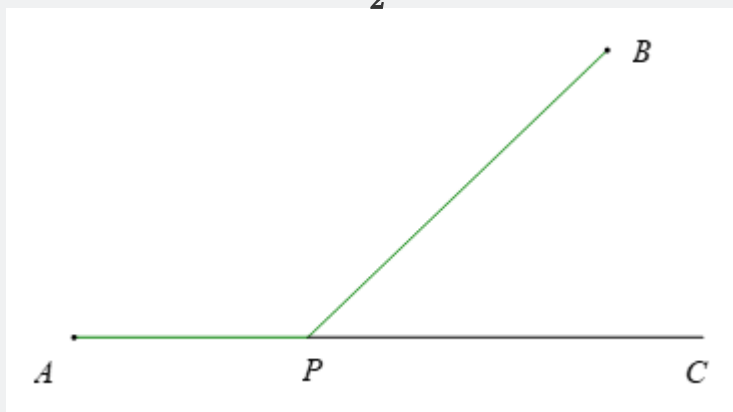


将上述问题抽象为数学问题：

假设小伙子在砂砾地带行走的速度是 $1\text{km/h}$ ，在驿道上行走的速度是 $2\text{km/h}$ ，则小伙子全程走砂砾地带所用时间为 $t_{\text{砂砾}} = \frac{AB}{1} = AB$ ，小伙子走 $AP$ 距离的驿道再走 $PB$ 距离的砂砾地带所用时间为 $t_{\text{折线}} = \frac{AP}{2} + \frac{PB}{1} = \frac{1}{2}AP + PB$ 。要想早点到家，即行走时间最短，即求 $t_{\text{折线}} = \frac{1}{2}AP + PB$ 的最小值。

再将上述问题简化，可以得到下面问题：

在直线 $AC$ 上有一个动点 $P$ ，点 $B$ 是直线外一点，求 $\frac{1}{2}AP + PB$ 的最小值。



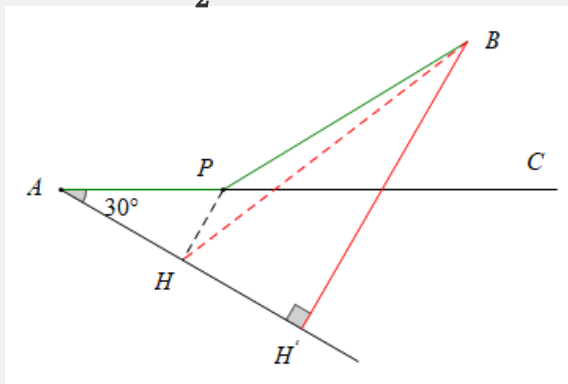
特点：

- ①两定一动． $A$ 、 $B$ 是两个定点，点 $P$ 是一个动点．
- ②动点 $P$ 在直线上运动．

我们知道求 $AP + PB$ 的最小值可以直接利用两点之间线段最短，但是有系数 $\frac{1}{2}$ 存在，就不能直接用两点之间的线段来表示最小值，那么如何解决这个问题呢？

可以利用转化的思想，将 $\frac{1}{2}AP$ 转化为一条系数为1的线段，就可以解决这个问题。由 $\frac{1}{2}AP$ 可以想到含 $30^\circ$ 角的直角三角形，于是可以通过构造含 $30^\circ$ 角的直角三角形转化线段。

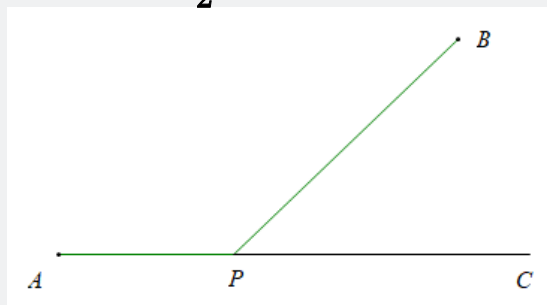
如图构造 $\angle CAH = 30^\circ$ ，过点 $P$ 作 $PH \perp AH$ 于点 $H$ ，在直角三角形中 $30^\circ$ 角所对的直角边等于斜边的一半，则 $PH = \frac{1}{2}AP$ 。所以 $\frac{1}{2}AP + PB = PH + PB$ ，因为 $P$ 点是动点，所以点 $H$ 也是动点，因此当 $BH \perp AH$ 时， $\frac{1}{2}AP + PB$ 最小，即 $BH'$ 。



思考：

当小伙子在砂砾地带行走的速度是 $1\text{km/h}$ ，在驿道上行走的速度是 $3\text{km/h}$ 、 $4\text{km/h}$ 、 $\frac{5}{3}\text{km/h}$ 时，求小伙子到家的最短时间，即求 $\frac{1}{3}AP + PB$ 、 $\frac{1}{4}AP + PB$ 、 $\frac{3}{5}AP + PB$ 的最小值。你能仿照上面的例子解决这个问题吗？

如果假设题目中，小伙子走在驿道上的速度为 $1\text{km/h}$ ，走在砂砾地带的速度为 $\frac{1}{2}\text{km/h}$ 时，求小伙子到家所用最短时间，即求 $t_{\text{折线}} = \frac{AP}{1} + \frac{PB}{\frac{1}{2}} = AP + 2PB$ 的最小值，怎么解决？



求“ $PB + nPA$ ”的最小值问题

1、胡不归问题的特点：

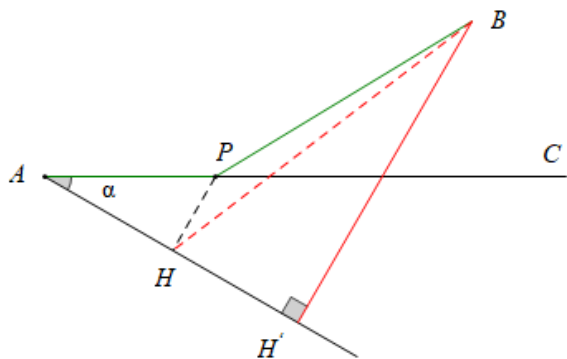
①两定一动。 $A$ 、 $B$ 是两个定点，点 $P$ 是一个动点；

②动点 $P$ 在直线上运动。

2、解题思路：

构造直角三角形，利用正弦关系转化带系数的线段。即构造 $\sin \alpha = n$ 。

点 $P$ 和点 $A$ 在同一条直线 $AC$ 上，构造的 $\alpha$ 角其实就是依托顶点 $A$ 及定直线 $AC$ 做出来的，即做一条过点 $A$ 的射线与定直线 $AC$ 所夹锐角为 $\alpha$ 。



3、特殊情况：

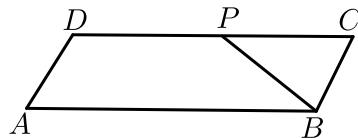
如果 $n$ 值大于1，则要先提取 $n$ ，再跟据思路2进行求解。

如： $PA + 3PB$ 的最小值转化为求 $3\left(\frac{1}{3}PA + PB\right)$

$2PA + 3PB$ 的最小值转化为求 $3\left(\frac{2}{3}PA + PB\right)$

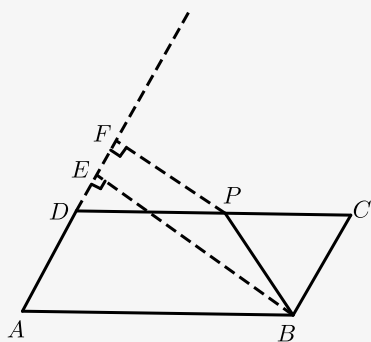
### 典题精炼

9. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 2$ ， $P$ 为边 $CD$ 上的一动点，则 $PB + \frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值等于\_\_\_\_\_。



【答案】  $3\sqrt{3}$

【解析】



过点 $P$ 作 $PF \perp AD$ ，交 $AD$ 延长线于点 $F$ ，

过点 $B$ 作 $BE \perp AD$ ，交 $AD$ 延长线于点 $E$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中，

$\because \angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ，

$\therefore AE = AB \cdot \cos \angle DAB = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ ，

又 $\because AD = BC = 2$ ，

$$\therefore AE > AD,$$

$\therefore E$ 在 $AD$ 的延长线上,

在 $\text{Rt}\triangle PFD$ 中,

$$\therefore \angle PDF = \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\therefore PF = PD \cdot \sin \angle PDF = \frac{\sqrt{3}}{2} PD,$$

$$\therefore PB + \frac{\sqrt{3}}{2} PD = PB + PF,$$

易知当 $B$ 、 $P$ 、 $F$ 三点共线时 $PB + PF$ 取最小值,

$$\text{即 } PB + \frac{\sqrt{3}}{2} PD \text{ 的最小值为 } BE = BA \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}.$$

故答案为:  $3\sqrt{3}$ .

**【标注】**【知识点】胡不归问题

10. 已知点 $Q\left(\frac{9}{2}, y_Q\right)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 图象上, 点 $A$ 为抛物线与 $x$ 轴的交点且位于 $x$ 轴负半轴上. 点 $M(m, 0)$ 是 $x$ 轴正半轴上的一个动点. 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM$ 的最小值为 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{33\sqrt{2}}{8}$

**【解析】** 当 $x = \frac{9}{2}$ 时,  $y = \frac{81}{4} - 18 - 5 = -\frac{11}{4}$ ,

$$\therefore Q\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{4}\right),$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x^2 - 4x - 5 = 0,$$

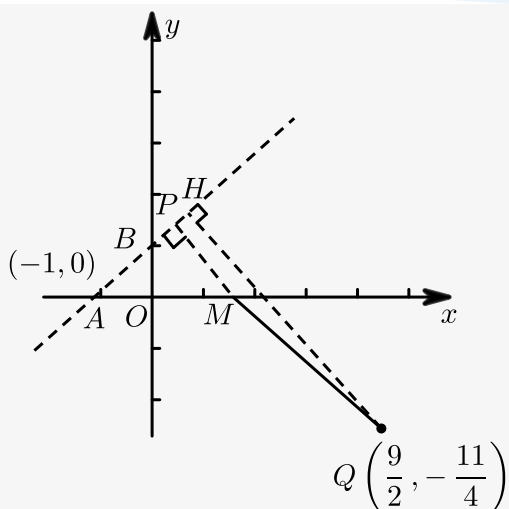
$$\text{解得 } x = 5 \text{ 或 } -1,$$

$$\therefore A(-1, 0),$$

$$\text{作直线 } y = x + 1 \text{ 与 } y \text{ 轴交于 } B(0, 1),$$

$$\therefore \angle BAM = 45^\circ,$$

过 $M$ 作 $MP \perp AB$ 于 $P$ , 过 $Q$ 作 $QH \perp AB$ 于 $H$ ,



$\therefore \triangle APM$  是等腰直角三角形，

$$\therefore AM = \sqrt{2}PM,$$

$$\text{即 } PM = \frac{\sqrt{2}}{2}AM,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM = PM + QM \geqslant QH,$$

$\therefore$  当且仅当  $P, M, Q$  三点共线且  $PQ \perp AB$  时， $\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM$  取得最小值，

$\therefore HQ \perp AB$ ，

$\therefore$  设直线  $HQ$  的解析式为  $y = -x + b$ ，

将  $Q\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{4}\right)$  代入  $y = -x + b$  得  $-\frac{9}{2} + b = -\frac{11}{4}$ ，

$$\therefore b = \frac{7}{4},$$

$$\therefore y = -x + \frac{7}{4},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + \frac{7}{4} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{11}{8} \end{cases},$$

$$\therefore H\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{8}\right),$$

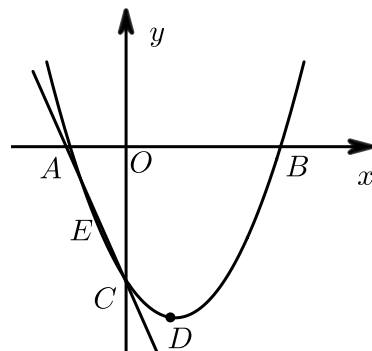
$$\therefore HQ = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{8}\right)^2 + \left(-\frac{11}{4} - \frac{11}{8}\right)^2} = \frac{33\sqrt{2}}{8},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM \text{ 的最小值为 } \frac{33\sqrt{2}}{8}.$$

故答案为： $\frac{33\sqrt{2}}{8}$ 。

**【标注】**【知识点】胡不归问题

如图，抛物线  $y = ax^2 - 2ax + c$  的图象经过点  $C(0, -2)$ ，顶点  $D$  的坐标为  $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$ ，与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 点  $F(0, y)$  是  $y$  轴上一动点，当  $y$  为何值时， $\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF$  的值最小。并求出这个最小值。

**【答案】** (1)  $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$ 。

(2)  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ 。

**【解析】** (1)  $\because D\left(1, -\frac{8}{3}\right), C(0, -2)$ ,

$$\therefore \begin{cases} c = -2, \\ a - 2a + c = -\frac{8}{3}, \end{cases}$$

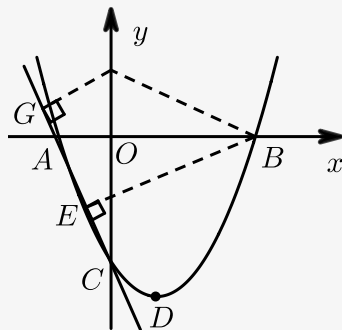
$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ c = -2, \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2。$$

(2) 如图，连接  $BF$ ，过点  $F$  作  $FG \perp AC$  于点  $G$ ，

$$\therefore \sin \angle FCG = \frac{FG}{CF} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore FG = CF \cdot \sin \angle FCG = \frac{\sqrt{5}}{5}CF,$$



$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}CF + BF = FG + BF \geq BE,$$

当折线段  $BFG$  与  $BE$  重合时，取得最小值。

由 (2) 可知  $\angle ABE = \angle ACO$ ，

$$\begin{aligned}\therefore BE &= AB \cdot \cos \angle ABE = AB \cdot \cos \angle ACO = 4 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} . \\ |y| &= OB \cdot \tan \angle ABE = OB \cdot \tan \angle ACO = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} , \\ \therefore \text{当 } y &= -\frac{3}{2} \text{ 时, } \frac{\sqrt{5}}{5}CF + BF \text{ 有最小值为 } \frac{8\sqrt{5}}{5} .\end{aligned}$$

**【标注】**【知识点】二次函数与动点问题

12. 已知抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ , 与  $x$  轴交于两点  $A, B$  (点  $A$  在点  $B$  的左侧), 与  $y$  轴交于点  $C$ .

(1) 求点  $A, B$  和点  $C$  的坐标.

(2) 已知  $P$  是线段  $BC$  上的一个动点.

① 若  $PQ \perp x$  轴, 交抛物线于点  $Q$ , 当  $BP + PQ$  取最大值时, 求点  $P$  的坐标.

② 求  $\sqrt{2}AP + PB$  的最小值.

**【答案】** (1)  $A$  点坐标为  $(-1, 0)$ ,  $B$  点坐标为  $(4, 0)$ ,  $C$  点坐标为  $(0, 2)$ .

(2) ①  $P\left(2 - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ .

②  $3\sqrt{5}$ .

**【解析】** (1) 令  $y = 0$ , 则  $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ , 解得  $x_1 = -1, x_2 = 4$ ,

$\therefore A$  点坐标为  $(-1, 0)$ ,  $B$  点坐标为  $(4, 0)$ ,

令  $x = 0$ , 则  $y = 2$ ,

$\therefore C$  点坐标为  $(0, 2)$ .

(2) ① 设  $l_{BC}: y = mx + n$ , 将  $B(4, 0), C(0, 2)$  分别代入得,

$$\begin{cases} 0 = 4m + n \\ 2 = n \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ n = 2 \end{cases},$$

故  $l_{BC}: y = -\frac{1}{2}x + 2$ ,

可设  $P\left(t, -\frac{1}{2}t + 2\right), 0 \leq t \leq 4$ ,

则  $Q\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2\right)$ , 且  $Q$  在  $P$  上方,

所以  $PQ = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2 - \left(-\frac{1}{2}t + 2\right) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$ ,

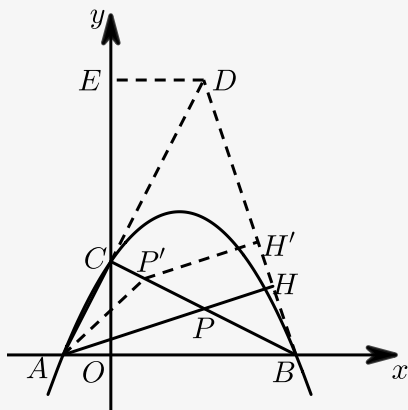
又  $BP = \sqrt{(4-t)^2 + \left(-\frac{1}{2}t + 2\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(4-t)$ ,

故  $BP + PQ = \frac{\sqrt{5}}{2}(4-t) + \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right)$

$= -\frac{1}{2}t^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)t + 2\sqrt{5}$ ,

当  $t = 2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$  时取得最大值, 此时  $P\left(2 - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ .

② 如图, 延长  $AC$  至点  $D$ , 使得  $CD = CB$ , 连接  $BD$ ,



作  $DE \perp y$  轴于点  $E$ , 过点  $P$  作  $PH \perp BD$  于点  $H$ ,

由  $AC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ ,  $BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ ,  $AB^2 = (-1 - 4)^2 = 25$ ,

所以  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

则  $\triangle BDC$  是等腰直角三角形,  $\angle CBD = 45^\circ$ ,

$\sqrt{2}AP + PB = \sqrt{2}(AP + PB \sin 45^\circ) = \sqrt{2}(AP + PH)$ ,

由垂线段最短可知, 当  $A, P, H$  共线时  $(AP + PH)$  取得最小值,

$\therefore \angle BCD = \angle DEC = \angle COB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle DCE + \angle BCO = \angle BCO + \angle CBO = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle DCE = \angle CBO$ ,

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BCO$ ,

$\therefore DE = CO = 2$ ,  $CE = BO = 4$ ,

可得点  $D$  的坐标为  $(2, 6)$ ,

$\therefore BD = \sqrt{(2-4)^2 + (6-0)^2} = 2\sqrt{10}$ ,

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot y_D = \frac{1}{2}BD \cdot AH$ , 代入可得

$\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \cdot AH$ ,

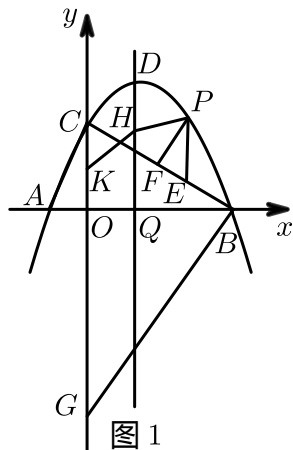
解得  $AH = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ , 故有  $\sqrt{2}AP + PB = \sqrt{2}(AP + PH) \geq \sqrt{2}AH = 3\sqrt{5}$

所以  $\sqrt{2}AP + PB$  的最小值为  $3\sqrt{5}$ .

**【标注】**【知识点】二次函数与动点问题

13. 在平面直角坐标系中, 抛物线  $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点 (点  $A$  在点  $B$  左侧), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 顶点为  $D$ , 对称轴与  $x$  轴交于点  $Q$ .

- (1) 如图1, 连接 $AC$ ,  $BC$ . 若点 $P$ 为直线 $BC$ 上方抛物线上一动点, 过点 $P$ 作 $PE \parallel y$ 轴交 $BC$ 于点 $E$ , 作 $PF \perp BC$ 于点 $F$ , 过点 $B$ 作 $BG \parallel AC$ 交 $y$ 轴于点 $G$ . 点 $H$ ,  $K$ 分别在对称轴和 $y$ 轴上运动, 连接 $PH$ ,  $HK$ . 当 $\triangle PEF$ 的周长最大时, 求 $PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$ 的最小值及点 $H$ 的坐标.



**【答案】** (1)  $PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$  的最小值为10, 此时 $H(1, \sqrt{3})$ .

**【解析】** (1) 对于抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$ , 令 $x = 0$ , 得到 $y = 2\sqrt{3}$ , 令 $y = 0$ , 得到 $-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3} = 0$ , 解得 $x = -2$ 或 $4$ ,  
 $\therefore C(0, 2\sqrt{3})$ ,  $A(-2, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  
 抛物线顶点 $D$ 坐标 $\left(1, \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ ,

$\because PF \perp BC$ ,

$\therefore \angle PFE = \angle BOC = 90^\circ$ ,

$\because PE \parallel OC$ ,

$\therefore \angle PEF = \angle BCO$ ,

$\therefore \triangle PEF \sim \triangle BCO$ ,

$\therefore$  当 $PE$ 最大时,  $\triangle PEF$ 的周长最大,

$\because B(4, 0)$ ,  $C(0, 2\sqrt{3})$ ,

$\therefore$  直线 $BC$ 的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$ ,

设 $P\left(m, -\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3}\right)$ ,

则 $E\left(m, -\frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3}\right)$ ,

$\therefore PE = -\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3}\right)$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 + \sqrt{3}m,$$

∴当 $m = 2$ 时,  $PE$ 有最大值,

$$\therefore P(2, 2\sqrt{3}),$$

如图, 将直线 $GO$ 绕点 $G$ 逆时针旋转 $60^\circ$ , 得到直线 $l$ ,

作 $PM \perp$ 直线 $l$ 于 $M$ ,  $KM' \perp$ 直线 $l$ 于 $M'$ , 则

$$PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG = PH + HK + KM' \geq PM,$$

$$\therefore P(2, 2\sqrt{3}),$$

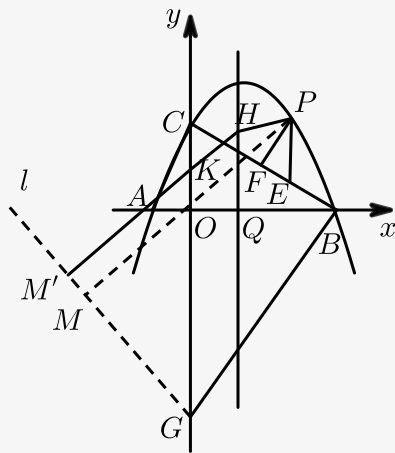
$$\therefore \angle POB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MOG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle MOG + \angle BOC + \angle POB = 180^\circ,$$

∴ $P, O, M$ 共线, 可得 $PM = 10$ ,

∴ $PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$ 的最小值为10, 此时 $H(1, \sqrt{3})$ .



【标注】【知识点】二次函数与动点问题

### 经典再现

14. 已知抛物线 $y = x^2 - bx + c$  ( $b, c$ 为常数,  $b > 0$ ) 经过点 $A(-1, 0)$ , 点 $M(m, 0)$ 是 $x$ 轴正半轴上的点.

(1) 当 $b = 2$ 时, 求抛物线的顶点坐标.

(2) 点 $D(b, y_D)$ 在抛物线上, 当 $AM = AD$ ,  $m = 5$ 时, 求 $b$ 的值.

(3) 点 $Q\left(b + \frac{1}{2}, y_Q\right)$ 在抛物线上, 当 $\sqrt{2}AM + 2QM$ 的最小值为 $\frac{33\sqrt{2}}{4}$ 时, 求 $b$ 的值.

【答案】(1)  $(1, -4)$ .

(2)  $b = 3\sqrt{2} - 1$ .

( 3 )  $b = 4$  .

【解析】( 1 )  $\because$  抛物线  $y = x^2 - bx + c$  经过点  $A(-1, 0)$  ,

$\therefore 1 + b + c = 0$  , 即  $c = -b - 1$  ,

当  $b = 2$  时 ,  $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$  ,

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(1, -4)$  .

( 2 ) 由 ( 1 ) 知 , 抛物线的解析式为  $y = x^2 - bx - b - 1$  ,

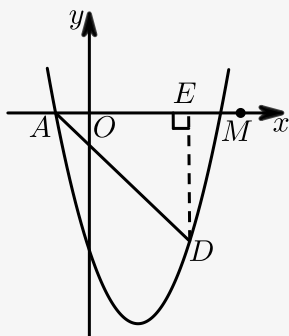
$\because$  点  $D(b, y_D)$  在抛物线  $y = x^2 - bx - b - 1$  上 ,

$\therefore y_D = b^2 - b \cdot b - b - 1 = -b - 1$  ,

由  $b > 0$  , 得  $b > \frac{b}{2} > 0$  ,  $-b - 1 < 0$  ,

$\therefore$  点  $D(b, -b - 1)$  在第四象限 , 且在抛物线对称轴  $x = \frac{b}{2}$  的右侧 ,

如图 , 过点  $D$  作  $DE \perp x$  轴 , 垂足为  $E$  , 则点  $E(b, 0)$  ,



$\therefore AE = b + 1$  ,  $DE = b + 1$  , 得  $AE = DE$  ,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中 ,  $\angle ADE = \angle DAE = 45^\circ$  ,

$\therefore AD = \sqrt{2}AE$  ,

由已知  $AM = AD$  ,  $m = 5$  ,

$\therefore 5 - (-1) = \sqrt{2}(b + 1)$  ,

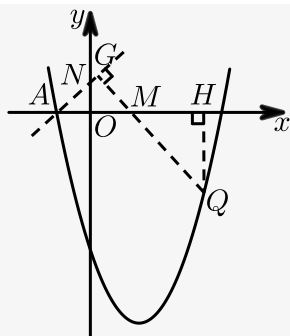
$\therefore b = 3\sqrt{2} - 1$  .

( 3 )  $\because$  点  $Q\left(b + \frac{1}{2}, y_Q\right)$  在抛物线  $y = x^2 - bx - b - 1$  上 ,

$\therefore y_Q = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - b\left(b + \frac{1}{2}\right) - b - 1 = -\frac{b}{2} - \frac{3}{4}$  ,

可知点  $Q\left(b + \frac{1}{2}, -\frac{b}{2} - \frac{3}{4}\right)$  在第四象限 , 且在直线  $x = b$  右侧 ,

考虑到  $\sqrt{2}AM + 2QM = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM\right)$  , 可取点  $N(0, 1)$  ,



如图，过点 $Q$ 作直线 $AN$ 的垂线，垂足为 $G$ ， $QG$ 与 $x$ 轴交于点 $M$ ，

有 $\angle GAM = 45^\circ$ ，得 $\frac{\sqrt{2}}{2}AM = GM$ ，

则此时点 $M$ 满足题意，

过点 $Q$ 作 $QH \perp x$ 轴于点 $H$ ，则点 $H\left(b + \frac{1}{2}, 0\right)$ ，

在 $\text{Rt}\triangle MQH$ 中，可知 $\angle QMH = \angle MQH = 45^\circ$ ，

$\therefore QH = MH$ ， $QM = \sqrt{2}MH$ ，

$\because$ 点 $M(m, 0)$ ，

$\therefore 0 - \left(-\frac{b}{2} - \frac{3}{4}\right) = \left(b + \frac{1}{2}\right) - m$ ，

解得 $m = \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$ ，

$\therefore \sqrt{2}AM + 2QM = \frac{33\sqrt{2}}{4}$ ，

$\therefore \sqrt{2}\left[\left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4}\right) - (-1)\right] + 2\sqrt{2}\left[\left(b + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{33\sqrt{2}}{4}$ ，

$\therefore b = 4$ 。

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

## 四、阿氏圆

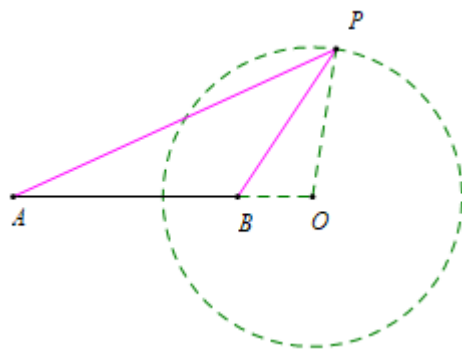
### 教法备注

阿氏圆又称阿波罗尼斯圆，已知平面上两点 $A$ 、 $B$ ，则所有满足 $PA = k \cdot PB$  ( $k \neq 1$ ) 的点 $P$ 的轨迹是一个圆，这个轨迹最先由古希腊数学家阿波罗尼斯发现，故称“阿氏圆”。

证明：

在直线 $AB$ 上取两点 $M$ 、 $N$ ，

其中点 $M$ 在线段 $AB$ 内，点 $N$ 在线段 $AB$ 外，

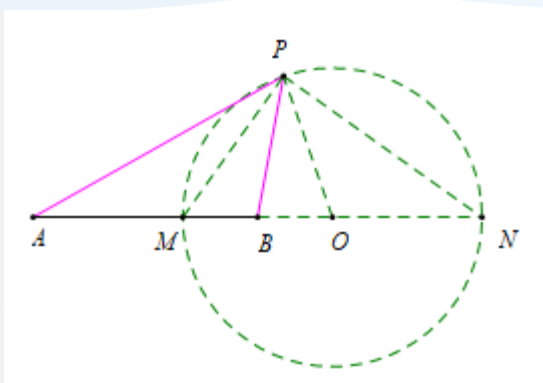


使  $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN} = k$ ，因为点P也满足  $\frac{AP}{BP} = k$ ，则  
 $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN} = \frac{AP}{BP}$ ，

所以PM是 $\angle APB$ 的内角角分线，

PN是 $\angle APB$ 的外角角分线，于是 $\angle MPN = 90^\circ$ ，

因此点P在以MN为直径的圆上．这个圆就是线段AB以及定比k的阿波罗尼斯圆．



阿波罗尼斯圆的性质（本节重点）：

$$\because \angle PMO = \angle A + \angle APM,$$

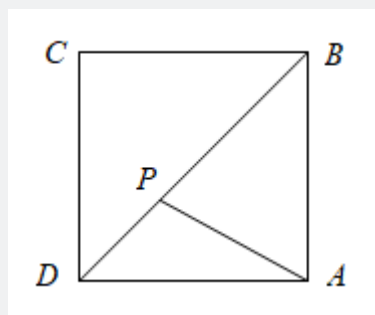
$$\angle MPO = \angle BPO + \angle MPB,$$

$$\angle PMO = \angle MPO, \angle APM = \angle MPB$$

$$\therefore \angle A = \angle BPO, \text{ 从而 } \triangle OAP \sim \triangle OPB, OP^2 = OA \cdot OB,$$

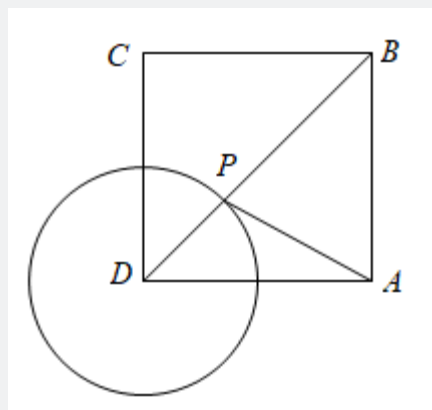
设 $\odot O$ 半径为r，则  $r^2 = OA \cdot OB$ ．

如图，在正方形ABCD中，其边长为8，点P是平面内的一个动点，且 $DP = 4$ ，求  $BP + \frac{1}{2}AP$  的最小值．



分析：

因为 $DP = 4$ ，所以点P的轨迹是以点D为圆心，4为半径的圆，如图所示：



本题特点：

①两定一动， $A$ 、 $B$ 为定点，点 $P$ 是动点．

②点 $P$ 在圆周上运动．

所以本题的解题方法不能按照“胡不归”问题的解题思路进行，在这里不能依托点 $P$ 所在的直线构造直角三角形．因此需要用到背景介绍里提到的“阿氏圆”，构造相似解决 $\frac{1}{2}PA$ ．

【解析】

由已知可得： $\frac{DP}{DA} = \frac{1}{2}$ ，

找到和 $\frac{1}{2}PA$ 长度相等的线段，背景介绍里已经提到了一组重要的相似三角形，可以通过这组相似找到和 $\frac{1}{2}PA$ 长度相等的线段．

在线段 $DA$ 上截取 $DQ = \frac{1}{2}DP$ ，即 $DQ = 2$ ，

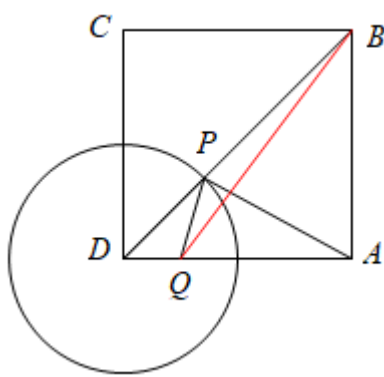
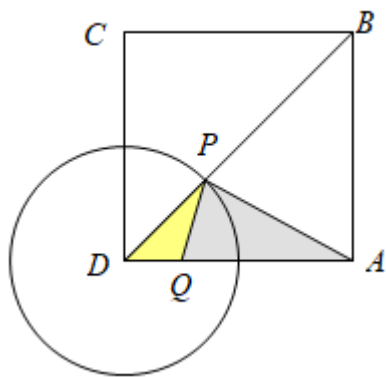
$\therefore \triangle PDQ \sim \triangle ADP$ ，

$\therefore \frac{PQ}{PA} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2}PA = PQ$ ，

$\therefore BP + \frac{1}{2}AP = BP + PQ$ ，

当 $B$ 、 $P$ 、 $Q$ 三点共线时， $BP + \frac{1}{2}AP$ 最小．

最小值为： $BQ = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ ．



“ $PB + nPA$ ”的最小值问题:

1、特点：

①两定一动．点 $A$ 、 $B$ 是定点，点 $P$ 是动点．

②动点 $P$ 在圆周上运动．

2、解题步骤：

①连接动点 $P$ 和圆心 $O$ ．

将系数不为1的线段的两个端点分别与圆心连接，如图中的线段 $OP$ 、 $OA$ ．

②计算出所连接的这两条线段的长度．

③计算这两条线段的长度比．即 $\frac{OP}{OA} = n$ ．

④在线段上取点 $Q$ ，使得 $\frac{OQ}{OP} = n$ ．得到 $\triangle OPQ \sim \triangle OAP$ ，则 $PQ = n \cdot PA$ ．

⑤连接 $BQ$ ，与圆交点即为当“ $PB + nPA$ ”的值最小时，点 $P$ 的位置．

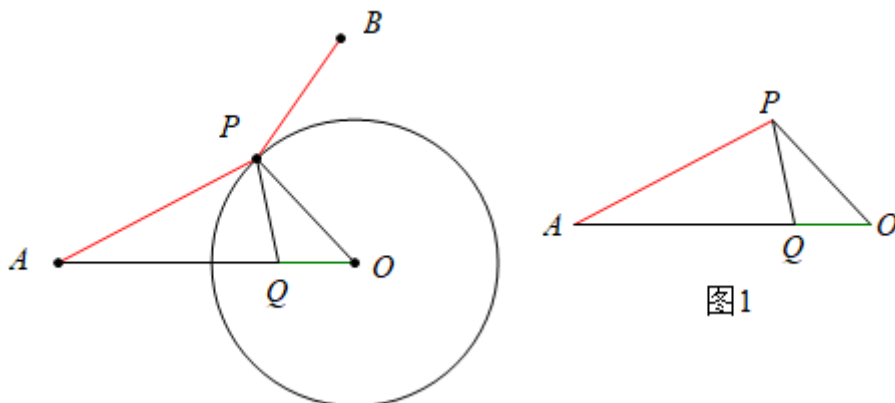


图1

3、“阿氏圆”问题本质是构造字母型相似，如图1．

构造 $\triangle OPQ \sim \triangle OAP$ ，得 $OP^2 = OQ \cdot OA$ ，即：半径的平方=构造线段×原有线段．所以 $PQ = n \cdot PA$ ．

4、特殊情况：

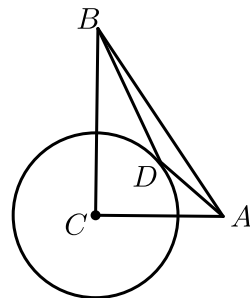
如果 $n$ 值大于1，则要先提取 $n$ ，再跟据思路2进行求解．

如： $PA + 3PB$ 的最小值转化为求 $3\left(\frac{1}{3}PA + PB\right)$

求 $2PA + 3PB$ 的最小值转化为求 $2PA + 3PB = 3\left(\frac{2}{3}PA + PB\right)$

### 典题精炼1

15. 如图，已知 $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， $AB = 10$ ，以点 $C$ 为圆心，4为半径作圆．点 $D$ 是 $\odot C$ 上的个动点，连接 $AD$ 、 $BD$ ，则 $AD + \frac{1}{2}BD$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ ．



【答案】  $2\sqrt{10}$

【解析】 连接 $CD$ ，

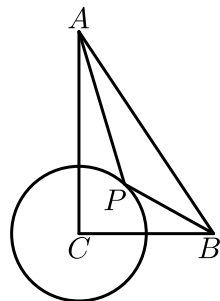
在 $CB$ 上取点 $M$ ，

使 $CM = \frac{1}{2}CD$ ，



典题精练2

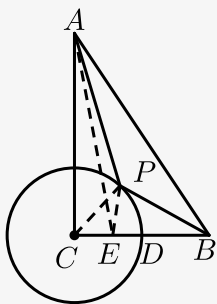
17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CB = 4$ ,  $CA = 6$ ,  $\odot C$ 半径为2,  $P$ 为圆上一动点, 连接 $AP$ ,  $BP$ , 则 $2AP + BP$ 的最小值为( ).



- A.  $2\sqrt{37}$       B. 12      C.  $4\sqrt{17} - 2$       D. 8

【答案】A

【解析】取 $CD$ 的中点 $E$ , 再连接 $PE$ ,  $PC$ ,  $AE$ ,



$$\begin{aligned}
 &\because E \text{ 为 } CD \text{ 中点,} \\
 &\therefore CE = \frac{1}{2}CD, \\
 &\because CD = 2, \\
 &\therefore CE = \frac{1}{2} \times 2 = 1, \\
 &\because CP = 2, CB = 4, \\
 &\therefore \frac{CE}{CP} = \frac{1}{2}, \frac{CP}{CB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \\
 &\therefore \frac{CE}{CP} = \frac{CP}{CB}, \\
 &\because \angle ECP = \angle PCB, \\
 &\therefore \triangle ECP \sim \triangle PCB, \\
 &\therefore \frac{PE}{PB} = \frac{CE}{CP} = \frac{1}{2}, \\
 &\therefore PE = \frac{1}{2}PB,
 \end{aligned}$$

$$\therefore 2AP + BP = 2\left(AP + \frac{1}{2}BP\right) = 2(AP + PE),$$

当  $A, P, E$  三点共线时,  $AP + PE$  有最小值,

此时  $2AP + BP$  有最小值,

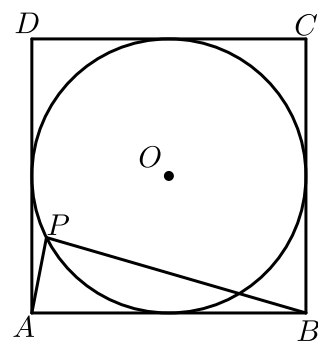
$$\therefore AP + PE \text{ 的最小值} = AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 1} = \sqrt{37},$$

$$\therefore 2AP + BP \text{ 的最小值} = 2\sqrt{37},$$

故选: A.

**【标注】**【知识点】阿氏圆问题

18. 如图, 边长为4的正方形, 内切圆记为  $\odot O$ ,  $P$  是圆上的动点, 求  $\sqrt{2}PA + PB$  的最小值.



**【答案】**  $2\sqrt{5}$ .

**【解析】**  $\sqrt{2}PA + PB = \sqrt{2}\left(PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PB\right),$

即求得  $PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PB$  的最小值即可,

点  $P$  的轨迹是以  $O$  为圆心的圆, 图中  $OP = \frac{\sqrt{2}}{2}OB$ , 比例系数与所求比例系数一致, 以  $OB$  为基准构造阿波罗尼斯圆,  $\odot O$  与直线  $OB$  交于  $P_1P_2$ ,

由阿波罗尼斯圆定理可知直径  $P_1P_2$  上存在定比点  $M$  使得

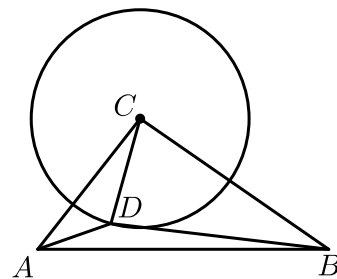
$$\frac{PB}{PM} = \frac{P_1B}{P_1M} = \frac{P_2B}{P_2M} = \lambda = \sqrt{2}, OP^2 = OM \cdot OB,$$

计算可得  $OM = \sqrt{2}$ ,

$$\text{勾股可得 } \sqrt{2}\left(PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PB\right) = \sqrt{2}(PA + PM) \geq 2\sqrt{5}.$$

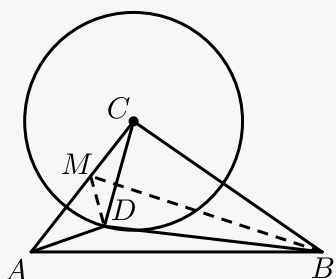
**【标注】**【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题

19. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 9$ , 以点  $C$  为圆心, 6 为半径的圆上有一个动点  $D$ . 连接  $AD$ 、 $BD$ 、 $CD$ , 则  $2AD + 3BD$  的最小值是 \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $12\sqrt{10}$

**【解析】** 如图，在  $CA$  上截取  $CM$ ，使  $CM = 4$ ，连接  $DM$ ， $BM$ ，



$$\because CD = 6, CM = 4, CA = 9,$$

$$\therefore CD^2 = CM \cdot CA,$$

$$\therefore \frac{CM}{CD} = \frac{CD}{CA},$$

$$\because \angle DCM = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle DCM \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{DM}{AD} = \frac{CD}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DM = \frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \frac{2}{3}AD + BD = DM + BD,$$

$$\because DM + BD \geq BM,$$

在  $\text{Rt}\triangle CBM$  中，

$$\because \angle MCB = 90^\circ, CM = 4, BC = 12,$$

$$\therefore BM = \sqrt{CM^2 + BC^2} = 4\sqrt{10},$$

$$\therefore \frac{2}{3}AD + BD \geq 4\sqrt{10},$$

$$\therefore \frac{2}{3}AD + BD \text{ 的最小值为 } 4\sqrt{10},$$

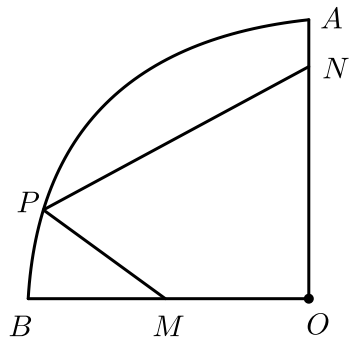
$$\therefore 2AD + 3BD \text{ 的最小值是 } 12\sqrt{10}.$$

故答案为： $12\sqrt{10}$ 。

**【标注】** 【知识点】阿氏圆问题

典题精练3

20. 在直角扇形 $OAB$ 中,  $OB = 6$ ,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $M$ 为 $OB$ 中点,  $ON = 5$ ,  $N$ 在 $OA$ 上,  $P$ 点是弧 $AB$ 上一动点, 则 $2PM + PN$ 的最小值为 \_\_\_\_\_.



【答案】 13

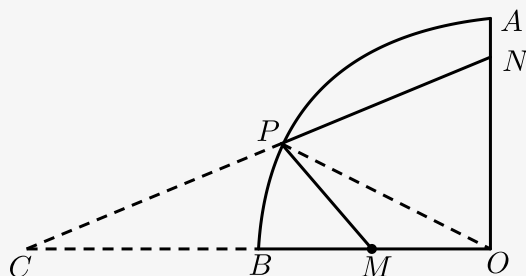
【解析】 延长 $OB$ 至 $C$ , 使得 $BC = BO$ , 连接 $CP$ ,  $OP$ ,

$$\therefore \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{2}, \angle POC = \angle MOP,$$

$$\therefore \triangle OMP \sim \triangle OPC,$$

$$\therefore PC = 2PM,$$

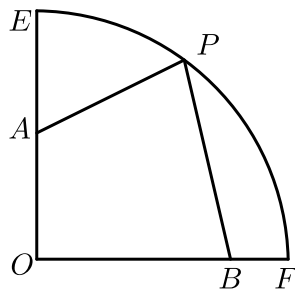
$\therefore$ 当 $C$ 、 $P$ 、 $N$ 三点共线时,



$$(2PM + PN)_{\min} = PC + PN = NC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

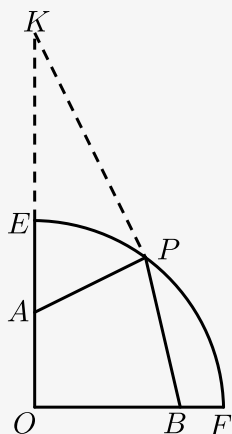
【标注】 【知识点】 阿氏圆问题

21. 如图, 四分之一圆上一点 $P$ ,  $OA = EA = 3$ ,  $OB = 5$ ,  $BF = 1$ , 求 $PA + \frac{1}{2}PB$ 的最小值.



【答案】  $\frac{13}{2}$ .

【解析】  $PA + \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}(2PA + PB)$ , 延长 $OE$ 使 $OK = 2OE = 12$ .

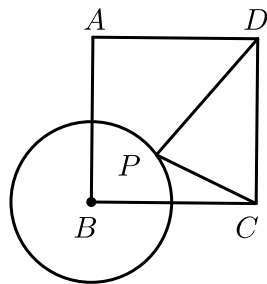


$$\begin{aligned} \therefore \frac{OA}{OP} &= \frac{OP}{OK}, \angle AOP = \angle KOP, \\ \therefore \triangle AOP &\sim \triangle POK, \\ \therefore PK &= 2PA, \\ \therefore 2PA + PB &= PK + PB \geq BK, \\ BK &= \sqrt{25 + 144} = 13, \\ \therefore PA + \frac{1}{2}PB &= \frac{1}{2}(PK + PB) \geq \frac{13}{2}, \\ \therefore \text{最小值} &\text{为 } \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】阿氏圆问题

#### 典题精练4

22. 如图，正方形  $ABCD$  的边长为 4， $\odot B$  的半径为 2， $P$  为  $\odot B$  上的动点，求  $\sqrt{2}PC - PD$  的最大值。



【答案】2.

【解析】点  $P$  的轨迹是以  $B$  为圆心的圆，

图中  $BP = \frac{1}{2}BC$ ，可以构造一个  $\frac{1}{2}PC$  的阿波罗尼斯圆；

图中  $BP = \frac{\sqrt{2}}{4}BD$ ，

可以构造一个  $\frac{\sqrt{2}}{4}PD$  的阿波罗尼斯圆；

在 $BC$ 上找一点 $M$ 使得

$$BP^2 = BM \cdot BC,$$

此时满足 $PC = 2PM$ ;

在 $BD$ 上找一点 $N$ 使得 $BP^2 = BN \cdot BD$ ,

此时满足 $PD = 2\sqrt{2}PN$ ;

$$\text{原题中的 } \sqrt{2}PC - PD = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{2}PC - \frac{\sqrt{2}}{4}PD \right) = 2\sqrt{2}(PM - PN).$$

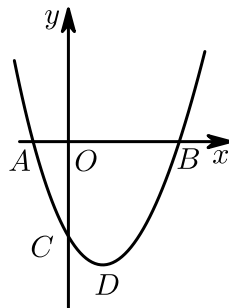
计算可得 $BM = 1$ 、 $BN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

$$\sqrt{2}PC - PD = 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{2}PC - \frac{\sqrt{2}}{4}PD \right) = 2\sqrt{2}(PM - PN) \leq 2\sqrt{2}MN = 2.$$

**【标注】**【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题

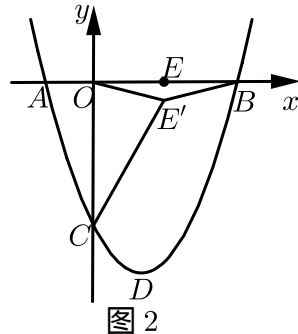
### 过关斩将

23. 如图, 已知: 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 $x$ 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点, 与 $y$ 轴交于点 $C$ , 点 $D$ 为顶点.



(1) 求抛物线解析式及点 $D$ 的坐标.

(2) 如图2,  $E$ 为 $OB$ 的中点, 将线段 $OE$ 绕点 $O$ 顺时针旋转得到 $OE'$ , 旋转角为 $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ), 连接 $E'B$ 、 $E'C$ , 当 $E'B + \frac{1}{2}E'C$ 取得最小值时, 求直线 $BE'$ 与抛物线的交点坐标.



**【答案】** (1) 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$ ,  $D(1, -4)$ .

(2)  $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{15}{16}\right)$ .

【解析】(1)  $\because$  抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  两点,

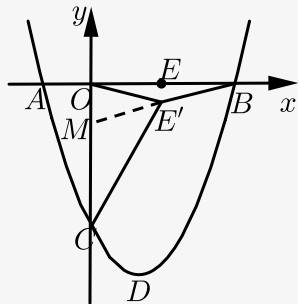
$$\therefore y = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3.$$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(1, -4)$ ,

$$\therefore D(1, -4).$$

(2) 如图所示: 在  $y$  轴负半轴上取点  $M$  使  $OM = \frac{3}{4}$ , 连接  $ME'$ .



$$\therefore OC = 3, OE' = \frac{3}{2}, OM = \frac{3}{4},$$

$$\therefore OE'^2 = OC \cdot OM,$$

$$\therefore \frac{OE'}{OM} = \frac{OC}{OE'},$$

$$\text{又} \because \angle MOE' = \angle E'OC,$$

$$\therefore \triangle OME' \sim \triangle E'OC,$$

$$\frac{ME'}{CE'} = \frac{OE'}{OC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore ME' = \frac{1}{2}CE',$$

$$\therefore E'B + \frac{1}{2}E'C = BE' + ME',$$

$\therefore$  当  $M$ 、 $E'$ 、 $B$  在一条直线上时,  $E'B + \frac{1}{2}E'C$  有最小值, 此时直线过  $B(3, 0)$ ,

$M\left(0, -\frac{3}{4}\right)$  两点,

$$\therefore \text{直线 } BE' \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4},$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{15}{16} \end{cases},$$

直线  $BE'$  与抛物线的交点坐标为  $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{15}{16}\right)$ .

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合